

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 87

A4. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

$$\text{B1. } \gamma = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+6} - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+6} - 3)}{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} - 3)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+6} - 3)}{x-3} = 6 \cdot 6 = 36$$

B2. $f'(x) = 3x^2 - 2ax + \beta$

Για να είναι οι εφαπτομένες της Cf στα σημεία με τετμημένες

1 και $\frac{1}{3}$ παράλληλες με τον άξονα x, πρέπει $f'(1) = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

$$\bullet f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2a + \beta = 0 \Leftrightarrow 2a - \beta = 3 \quad (1)$$

$$\bullet f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{2a}{3} + \beta = 0 \Leftrightarrow -2a + 3\beta = -1 \quad (2)$$

Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $2\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$

Από τη σχέση (1) για $\beta = 1$, έχουμε $2a - 1 = 3 \Leftrightarrow a = 2$

B3. Για $\alpha = 2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 36$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 36$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

x	-∞	$\frac{1}{3}$	1	+∞
$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$	+	0	-	0
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, \frac{1}{3}]$, $[1, +\infty)$, ενώ

είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{3}, 1]$.

$$\text{ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΝΙΣΤΟ : } f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 36 = \frac{976}{27}$$

$$\text{ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ : } f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 36 = 36$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. 1^η κλάση : [50 , 50 + c]

2^η κλάση : [50 + c , 50 + 2c]

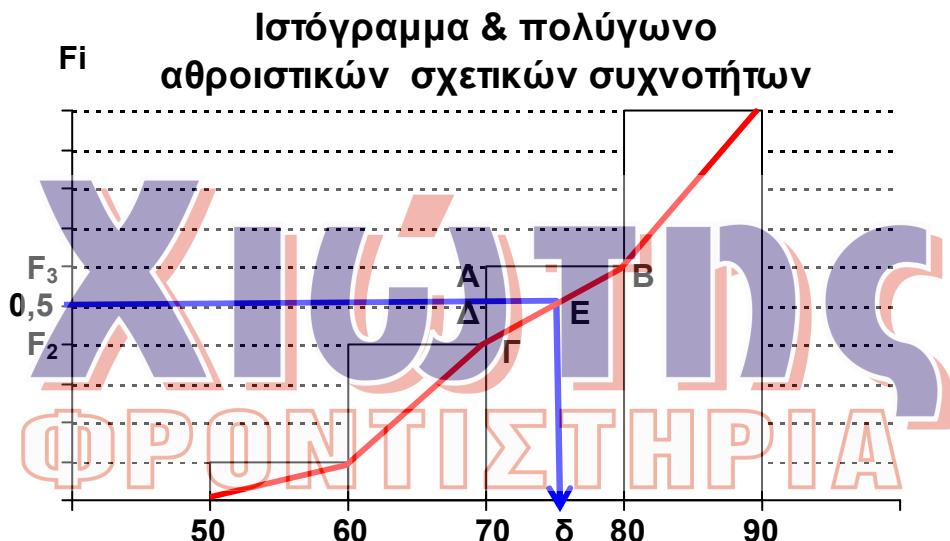
3^η κλάση : [50 + 2c , 50 + 3c]

4^η κλάση : [50 + 3c , 50 + 4c]

$$x_4 = \frac{50 + 3c + 50 + 4c}{2} \Leftrightarrow 85 = \frac{100 + 7c}{2} \Leftrightarrow \\ 100 + 7c = 170 \Leftrightarrow 7c = 70 \Leftrightarrow c = 10$$

Γ2.

Κλάσεις	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
[50 , 60)	55	f_1	f_1	$55f_1$
[60 , 70)	65	f_2	$f_1 + f_2$	$65f_2$
[70 , 80)	75	f_3	$f_1 + f_2 + f_3$	$75f_3$
[80 , 90)	85	$2f_3$	$f_1 + f_2 + 3f_3$	$170f_3$
ΣΥΝΟΛΑ	-	1	-	$55f_1 + 65f_2 + 245f_3$



- $\sum f_i = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 3f_3 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 1 - 3f_3 \quad (1)$
- $\bar{x} = \sum x_i f_i = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 245f_3 = 74 \quad (2)$
- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια άρα

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma} \Leftrightarrow \frac{10}{5} = \frac{F_3 - F_2}{0,5 - F_2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2 = \frac{f_3}{0,5 - (1 - 3f_3)} \Leftrightarrow$$

$$6f_3 - 1 = f_3 \Leftrightarrow 5f_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = 0,2 \quad (3)$$
- $f_4 = 2f_3 = 0,4$

- (1) $\stackrel{(3)}{\Rightarrow} f_1 + f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,4 - f_1$ (4)
- (2) $\stackrel{(3)}{\Rightarrow} \stackrel{(4)}{55f_1 + 65(0,4 - f_1) + 245 \cdot 0,2 = 74} \Leftrightarrow 55f_1 + 26 - 65f_1 + 49 = 74 \Leftrightarrow -10f_1 = -1 \Leftrightarrow f_1 = 0,1$ (5)
- (4) $\stackrel{(5)}{\Rightarrow} f_2 = 0,3$

Επομένως ο πίνακας συμπληρωμένος είναι

Κλάσεις	x_i	f_i
[50 , 60)	55	0,1
[60 , 70)	65	0,3
[70 , 80)	75	0,2
[80 , 90)	85	0,4
ΣΥΝΟΛΑ	-	1

Γ3. Για τις παρατηρήσεις μικρότερες του 80 ισχύει :

Κλάσεις	x_i	f_i	v_i	$x_i v_i$
[50 , 60)	55	0,1	0,1v	5,5v
[60 , 70)	65	0,3	0,3v	19,5v
[70 , 80)	75	0,2	0,2v	15v
ΣΥΝΟΛΑ	-	1	0,6v	40v

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{\sum v_i} = \frac{40v}{0,6v} = \frac{200}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = x^2 + \kappa + 1$ και $f(1) = \kappa + 2$
 $f'(x) = (x^2 + \kappa + 1)' = 2x$ και $f'(1) = 2$

Εύρεση εξίσωσης εφαπτομένης

$$(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y = 2x + \kappa$$

Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες

- x' : Θέτω $y = 0$, οπότε $x = -\frac{\kappa}{2}$, άρα $A\left(-\frac{\kappa}{2}, 0\right)$
- y' : Θέτω $x = 0$, οπότε $y = \kappa$, άρα $B(0, \kappa)$

Εύρεση εμβαδού

$$E = \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\kappa}{2} \right| \cdot |\kappa| \stackrel{\kappa > 2}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa}{2} \cdot \kappa = \frac{\kappa^2}{4}$$
$$E < 4 \Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{4} < 4 \Leftrightarrow \kappa^2 < 16 \Leftrightarrow |\kappa| < 4$$
$$\Leftrightarrow \stackrel{\kappa > 2}{\kappa < 4} \Leftrightarrow \stackrel{\kappa > 2}{2 < \kappa < 4} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 3$$

Δ2. α) Τα $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{50}, y_{50})$ είναι τα 50 σημεία της (ε) , άρα επαληθεύουν την εξίσωση $y = 2x + 3$.

$$\text{Επομένως } y_i = 2x_i + 3 \Leftrightarrow x_i = \frac{1}{2}y_i - \frac{3}{2}, i = 1, \dots, 50$$

$$\text{Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου } \bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y} - \frac{3}{2} \stackrel{\bar{y}=63}{=} 30$$

$$\begin{aligned}
 \beta) \bar{x}' &= \frac{(x_1+3)+\dots+(x_{20}+3)+x_{21}+\dots+x_{35}+(x_{36}-\lambda)+\dots+(x_{50}-\lambda)}{50} \\
 \Leftrightarrow 31 &= \frac{(x_1+\dots+x_{20}+x_{21}+\dots+x_{35}+x_{36}+\dots+x_{50})+60-15\lambda}{50} \\
 \Leftrightarrow 31 &= \frac{\sum x_i + 60 - 15\lambda}{50} \Leftrightarrow 31 = \frac{\sum x_i}{50} + \frac{60-15\lambda}{50} \\
 \Leftrightarrow 31 &= \bar{x} + \frac{60-15\lambda}{50} \Leftrightarrow 31 = 30 + \frac{60-15\lambda}{50} \\
 \Leftrightarrow 1 &= \frac{60-15\lambda}{50} \Leftrightarrow 60-15\lambda = 50 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Δ3. Εύρεση τιμών $f(1)$, $f'(0)$

$$f(x) = x^2 + 4, \text{ áρα } f(1) = 5$$

$$f'(x) = 2x, \text{ áρα } f'(0) = 0$$

Εύρεση μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$			

$$0 < \alpha < \beta < \gamma < 1 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow}$$

$$0 < 4 = f(0) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(1) = 5$$

Τελική διάταξη

$$f'(0) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(1)$$

Εύρεση εύρους

$$R = f(1) - f'(0) = 5 - 0 = 5$$

Εύρεση μέσης τιμής

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{5} = \frac{f'(0) + f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(1)}{5} \\ &= \frac{0 + \alpha^2 + 4 + \beta^2 + 4 + \gamma^2 + 4 + 5}{5} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 17}{5} \stackrel{(*)}{=} \frac{6 + 17}{5} = \frac{23}{5}\end{aligned}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι λάθος το δεδομένο ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6$

Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$, τότε $0 < \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 3$

άρα $\frac{17}{5} < \bar{x} < 4 < \frac{23}{5}$

